

Антифрикционные и противоизносные свойства. Методы испытаний / *Р.М. Матвеевский, В.Л. Лаихи, И.А. Буяновский* и др. – М.: Машиностроение, 1989. – 224с. **26.** *Тихомиров В.П., Швыряев М.В.* Определение коэффициента трения при граничной смазке // Динамика, прочность и надёжность транспортных машин: Сб. науч. тр. Брянск. гос. техн. ун-та. – Брянск: БГТУ, 1999. – С. 148-154. **27.** *Haizuka Shoji, Itoh Kenichi, Nawate Humikazu, Naruse Chotaro.* Nihon kikai gakkai ronbunshu // Trans. Jap. Soc. Mech. Eng. C. – 2000. – Vol. 66, № 642. – P. 286-293. (Исследование потерь на трение в цилиндрических прямозубых зубчатых передачах.) **28.** *Заманова В.А., Костомарова Е.А., Юрьева А.В.* База данных "Коэффициенты трения" // Тр. СНТК Новомоск. ин-та Рос. хим.-технол. ун-та. – Новомосковск: НИ РХТУ, 2000. – С. 14-16. **29.** *Кривенко И.И.* Определение характеристик изнашивания пар трения методом электрической проводимости: Дис. канд. техн. наук: 05.02.04. – К., 1983. – 212с. **30.** *Крупкин П.Л., Циванюк К.В.* Исследование периодических колебаний коэффициента трения // Трение и износ. – 1993. – Т. 14, № 2. – С. 277-284. **31.** *Поверхностная прочность материалов при трении / Б.И. Костецкий, И. Г.Носовский, А.К. Караулов* и др.; Под общ. ред. д-ра техн. наук *Б.И. Костецкого*. – К.: Техніка, 1976. – 296с. **32.** *Кривенко И.И.* Механизм граничной смазки и периодические колебания показателей трения // Трение и износ. – 1994. – Т. 15, № 3. – С. 410-416. **33.** *Караулов А.К., Худолый Н.Н.* Автомобильные масла. Моторные и трансмиссионные. Ассортимент и применение. – К.: Радуга, 2000. – 436с. **34.** *Костецкий Б.И., Натансон М.Э., Бершадский Л.И.* Механохимические процессы при граничном трении. – М.: Наука, 1972. – 172с. **35.** *Xu Fu-ren.* Xixie sheji yu zhizao // Mach. Des. and Manuf. – 2000. – № 5. – P. 37-39. (Соотношения между флуктуацией выходного момента зубчатой передачи, коэффициентом трения между зубьями и числом зубьев.) **36.** *Хакен Г.* Синергетика: Иерархии неустойчивостей в самоорганизующихся системах и устройствах. – М.: Мир, 1985. – 462с. **37.** *Матвеевский Р.М.* Температурная стойкость граничных смазочных слоёв и твёрдых смазочных покрытий при трении металлов и сплавов. – М.: Наука, 1971. – 228с. **38.** *Матвеевский Р.М., Буяновский И.А., Лазовская О.В.* Исследования температурных пределов защитных свойств смазочных слоёв при трении // Износостойкость. – М.: Наука, 1975. – С. 51-75. **39.** *Березняков А.И.* О взаимосвязи триботехнических с особенностями распространения поверхностных волн Стоунли в поглощающей среде // Трение и износ. – 2000. – Т. 21, № 3. – С. 264-268. **40.** *Матвеевский Р.М., Буяновский И.А., Лазовская О.В.* Противозадирная стойкость смазочных сред при трении в режиме граничной смазки. – М.: Наука, 1978. – 192с. **41.** *Трение и износ в экстремальных условиях: Справочник / Ю.Н. Дроздов, В.Г. Павлов, В.Н. Пучков.* – М.: Машиностроение, 1986. – 224с. **42.** *Трение, изнашивание и смазка: Справочник. В 2-х кн. / Под ред. И.В. Крагельского, В.В. Алицина.* – М.: Машиностроение, 1978. – Кн. 1. – 400с. **43.** *Bowden F.P., Tabor D.* The friction and lubrication of solids. – London, Oxford: Clarendon Press, 1950. **44.** *Hardy W., Doubleday I.* Boundary Lubrication. The Temperature Coefficient. Proc. Roy. Soc. – 1922. – Vol. 101, № 1. **45.** *Фукс И.Г., Буяновский И.А.* Введение в трибологию. – М.: Нефть и газ, 1995. – 278с. **46.** *Бершадский Л.И., Варнавин С.В., Нагорных С.Н., Сарафанов Г.Ф.* О структурно-динамических аспектах трения металлов // Трение и износ. – 1994. – Т. 15, № 1. – С. 40-48. **47.** *Матвеевский Р.М., Лозовой Ю.А., Шепелева Е.С.* Эффективность противоизносных присадок и температура их взаимодействия с поверхностью трения // Химия и технология топлив и масел. – 1970. – № 8. – С. 39-46. **48.** *Sethuramiah A., Ocabe H., Sacurai T.* Critical temperature in EP lubrication // Wear. – 1974. – Vol. 26, № 2. – P. 187-206. **49.** *Матвеевский Р.М., Буяновский И.А., Лаихи В.Л., Виттер А.Б.* Оценка энергии активации процесса химического модифицирования поверхностей трения в условиях граничной смазки // Химия и технология топлив и масел. – 1976. – № 2. – С. 50-52. **50.** *Bailey M.W., Cameron A.* The influence of temperature and metal pairs on the scuffing of a commercial oil // Proc. Inst. Mech. Engrs. – 1973. – Vol. 187, № 67. – P. 757-761. **51.** *Физические величины. Справочник.* – М.: Энергоиздат, 1991. – 478с. **52.** *Боуден Ф.П., Тейбор Д.* Трение и смазка. – М.: Машгиз, 1960. – 480с. **53.** *Кониссаров Д.В.* Трение и износ металлов. – М.: Машгиз, 1947. – 246с. **54.** *Кузнецов В.Д.* Физика твёрдого тела. Т. 4. – Томск: Полиграфиздат, 1947. – 316с. **55.** *Виноградова И.Э.* Противоизносные присадки к маслам. – М.: Химия, 1972. – 164с. **56.** *Запорожец В.В., Билякович О.Н., Захарченко А.В.* Оптимизация концентрации химически активных веществ в трансмиссионных маслах // Проблемы трибологии (Problems of Tribology). – 2000. – № 2. – С. 35-41. **57.** *Запорожец В.В., Билякович О.Н., Захарченко А.В.* Оптимизация концентрации пакета присадок при легировании трансмиссионных масел // Вісник Харківського державного політехнічного університету. Тем. вип. "Технології в машинобудуванні". – Харків: ХДПУ, 2000. – № 109. – С. 208-216. **58.** *Запорожец В.В., Билякович О.Н., Захарченко А.В.* Сравнительная оценка эффективности смазочного действия различных трансмиссионных масел //

Авиационно-космическая техника и технология. Тем. вып. "Тепловые двигатели и энергоустановки". – Харьков: ГАУ "ХАИ", 2000. – № 19. – С. 473-477. **59.** *Запорожец В.В., Билякович О.Н., Захарченко А.В.* Підвищення мастильної дії трансмісійних оли в умовах граничного режиму тертя // Пр. Міжнар. конф. "Авіа-2001". – Київ: НАУ, 2001. – Т. 1. – С. 14.110-14.113. **60.** *Розенберг Ю.А.* Влияние смазочных масел на надёжность и долговечность машин. – М.: Машиностроение, 1970. – 312с. **61.** Современная трибология: Итоги и перспективы // Отв. ред. *К.В. Фролов*. – М.: Издательство ЛКИ, 2008. – 480с.

Поступила в редколлегию 28.04.09

УДК 531.539.3.62.752(031)

Е.М. ИВАНОВ, к.т.н., доц. каф. инженерной графики ХНАДУ "ХАДИ"

МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ РЕЗОНАНСНЫХ ЧАСТОТ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ

Пропонується структурно-аналітичний метод який базується на принципах теорії автоматичного керування відносно до лінійних коливальних системам (КС) як консервативних, так і дисипативних з будь-яким числом ступенів вільності.

Structural-analysis method based on the principles of the theory of automated control relative to linear oscillatory systems (KC) both conservative and dissipative with any number of degrees of freedom has been offered.

Среди методов определения резонансных частот колебательных систем (КС) [2, 4] в литературе не был изложен предлагаемый структурно-аналитический метод, базирующийся на принципах теории автоматического управления с использованием в описании отдельных звеньев преобразования Фурье [1]. Предлагаемый метод будет изложен применительно к линейным КС с любым числом степеней свободы (n) как к консервативным, так и дисипативным. В существующей литературе авторы ограничиваются определением резонансных частот консервативными КС, хотя в реальности наиболее часто встречаются диссипативные КС. Рассмотрение данного метода будем осуществлять последовательно от простой КС к более сложной. Наиболее простой КС является консервативная КС с одной степенью свободы. Ее дифференциальное уравнение следующее

$$m \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + cx(t) = F(t), \quad (1)$$

где m – масса; c – коэффициент жесткости (упругости); $F(t)$ – внешнее воздействие; $x(t)$ – перемещение; t – время.

Используя оператор Лапласа ($p = d/dt$) [1], уравнение (1) принимает вид

$$x(p) = \frac{F(p)}{mp^2 + c}, \quad (2)$$

где $x(p)$, $F(p)$ – изображение Лапласа оригиналов $x(t)$, $F(t)$ соответственно.

Представим (2) в преобразованиях Фурье [1], заменив p на $j\omega$. Тогда (2) будет таким

$$x(j\omega) = \frac{F(j\omega)}{c - m\omega^2}. \quad (3)$$

Физически известно, что в режиме резонанса амплитуда колебаний КС максимальна по сравнению с амплитудами колебаний вне точки резонанса. Из (3) видно, что максимум $x(j\omega)$ при неизменном на всех режимах колебаний КС $F(j\omega)$ будет при $c - m\omega^2 = 0$, откуда для данной КС резонансная частота $\omega_p = \sqrt{c/m}$, равная собственной частоте. Если КС с одной степенью свободы является диссипативной, то ее дифференциальное уравнение следующее

$$m \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + b \frac{dx(t)}{dt} + cx(t) = F(t), \quad (4)$$

где b – коэффициент диссипации.

Здесь

$$x(j\omega) = F(j\omega) \frac{1}{c - m\omega^2 + jb\omega}. \quad (5)$$

Максимум $x(j\omega)$ при неизменном по величине $F(j\omega)$ будет при

$$c - m\omega^2 + jb\omega = 0, \quad (6)$$

Известно [1], что если комплексное число равно нулю, то равны нулю действительная и мнимая части соответственно. Частоты ω , также как собственные частоты, являются действительными. Поэтому будем пользоваться выражением $c - m\omega^2 = 0$, откуда собственная частота системы (4) равна $\omega_0 = \sqrt{c/m}$. Однако понятно, что при наличии диссипации резонансная частота ω_p несколько отличается от ω_0 . Но из выражения (6) влияние диссипации на ω_0 мы не получили. Для выявления связи между c , m и b в определении резонансной частоты ω_p представим (5) в виде

$$x(j\omega) = \frac{F(j\omega)(c - m\omega^2 - jb\omega)}{(c - m\omega^2)^2 + (b\omega)^2}, \quad (7)$$

где $j = \sqrt{-1}$.

Еще раз заметим, что во всех решениях будем считать, что на всем частотном диапазоне колебаний любой КС величина $F(j\omega)$ не изменяется. Тогда из (7) видно, что максимум $x(j\omega)$ будет при соблюдении равенства $(c - m\omega^2)^2 + (b\omega)^2 = 0$ или

$$m^2\omega^4 + (b^2 - 2mc)\omega^2 + c^2 = 0. \quad (8)$$

Из (8) определим резонансную частоту ω_p диссипативной КС. Уравнение (8) является биквадратным. Обозначим $\omega^2 = \gamma^2$. Тогда (8) примет вид $m^2\gamma^2 + (b^2 - 2mc)\gamma + c^2 = 0$, корни которого

$$\gamma_{1,2} \leq \frac{2mc - b^2 \pm \sqrt{(2mc - b^2)^2 - 4m^2c^2}}{2m^2} = \frac{c}{m} \pm \frac{b}{2m^2} \sqrt{b^2 - 4mc},$$

и тогда

$$\omega_{p(1,2)} = \sqrt{\gamma_{1,2}} = \sqrt{\frac{c}{m} \pm \frac{b}{2m^2} \sqrt{b^2 - 4mc}}. \quad (9)$$

Как видим, из выражения (9) следует, что диссипативная КС с одной степенью свободы может резонировать на двух частотах $\omega_{1p} = \sqrt{\frac{c}{m} + \frac{b}{2m^2} \sqrt{b^2 - 4mc}}$, $\omega_{2p} = \sqrt{\frac{c}{m} - \frac{b}{2m^2} \sqrt{b^2 - 4mc}}$. Так как собственные (резонансные) частоты действительные числа, то если дискриминант $b^2 - 4mc < 0$, то $\omega_{1p} = \omega_{2p} = \sqrt{c/m}$, то есть это собственная частота КС с одной степенью свободы. Если $b^2 - 4mc > 0$, то резонансных частот в данной КС две ω_{1p} и ω_{2p} .

Кстати, в эксперименте с диссипативной КС при работе ее в определенном частотном диапазоне наблюдается наличие двух резонансов. При $b^2 \gg 4mc$

$$\omega_{1p} = \sqrt{\frac{c}{m} + \left(\frac{b}{2m}\right)^2}; \quad \omega_{2p} = \sqrt{\frac{c}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}.$$

Обычно в литературе по колебаниям встречается $\omega_{1p} = \sqrt{c/m - (b/2m)^2}$, однако, как видно из данного решения, имеется частота ω_{2p} .

Далее перейдем к КС с двумя степенями свободы. Механическая схема такой КС при-

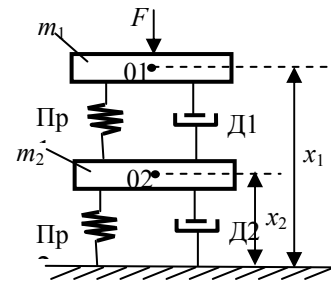


Рисунок 1

ведена на рисунке 1, где m_1, m_n – массы; Пр1, Пр2 – пружины; Д1, Д2 – демпферы; x_1, x_2 – перемещения масс m_1, m_2 соответственно; F – внешнее воздействие.

Уравнения ее следующие

$$\left. \begin{aligned} m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} + b_1 \frac{dx_1}{dt} + c_1 x_1 &= F + c_1 x_2 + b_1 \frac{dx_2}{dt}, \\ m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} + (b_1 + b_2) \frac{dx_2}{dt} + (c_1 + c_2) x_2 &= c_1 x_1 + b_1 \frac{dx_1}{dt}, \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

где c_1, c_2, b_1, b_2 – коэффициенты жесткости (упругости) и диссипации соответственно.

Из (10) получаем структурную схему данной КС, изображенную на рисунке 2,

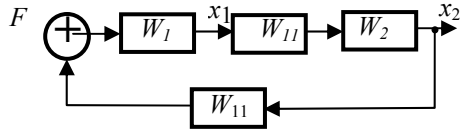


Рисунок 2

где $F = F(j\omega)$, $x_1 = x_1(j\omega)$, $x_2 = x_2(j\omega)$, $W_1 = W_1(j\omega)$, $W_2 = W_2(j\omega)$, $W_{11} = W_{11}(j\omega)$ – передаточные функции (в изображениях Фурье), то есть

$$W_1(j\omega) = \frac{1}{c_1 - m_1 \omega^2 + j b_1 \omega}; \quad W_{11}(j\omega) = c_1 + j b_1 \omega$$

$$W_2(j\omega) = \frac{1}{c_1 + c_2 - m_2 \omega^2 + j \omega (b_1 + b_2)}.$$

Общие передаточные функции системы (10) относительно $x_1(j\omega)$ и $x_2(j\omega)$ имеют соответственно вид

$$W_{I_{K1}}(j\omega) = \frac{W_1(j\omega)}{1 - W_1(j\omega)W_{11}^2(j\omega)W_2(j\omega)};$$

$$W_{I_{K2}}(j\omega) = \frac{W_1(j\omega)W_{11}(j\omega)W_2(j\omega)}{1 - W_1(j\omega)W_{11}^2(j\omega)W_2(j\omega)}.$$

(11)

Вначале рассмотрим консервативную КС с двумя степенями свободы.

Тогда $W_1(\omega) = \frac{1}{c - m_1 \omega^2}$; $W_{11}(\omega) = c_1$; $W_2(\omega) = \frac{1}{c_1 + c_2 - m_2 \omega^2}$.

Подставим значения $W_1(j\omega)$, $W_{11}(j\omega)$, $W_2(j\omega)$ в выражение $x_1(j\omega) = F(j\omega)W_{I_{K1}}(j\omega)$; $x_2(j\omega) = F(j\omega)W_{I_{K2}}(j\omega)$. Тогда имеем

$$x_1(j\omega) = \frac{(c_1 + c_2 - m_2 \omega^2)F(j\omega)}{(c_1 - m_1 \omega^2)(c_1 + c_2 - m_2 \omega^2) - c_1^2};$$

$$x_2(j\omega) = \frac{c_1 F(j\omega)}{(c_1 - m_1 \omega^2)(c_1 + c_2 - m_2 \omega^2) - c_1^2}.$$

Из (12) $x_1(j\omega) = \max$, $x_2(j\omega) = \max$ при

$$(c_1 - m_1 \omega^2)(c_1 + c_2 - m_2 \omega^2) - c_1^2 = 0. \quad (13)$$

Раскрывая скобки в (13), получим уравнение

$$\omega^4 - \left(\frac{c_1 + c_2}{m_2} + \frac{c_1}{m_1} \right) \omega^2 + \frac{c_1 c_2}{m_1 m_2} = 0. \quad (14)$$

Уравнение (14) полностью соответствует известному частотному уравнению для консервативной КС [2]. Его корни, соответствующие резонансным частотам, следующие

$$\omega_{p1,2} = \left[\frac{1}{2} \left(\frac{c_1 + c_2}{m_2} + \frac{c_1}{m_1} \right) \mp \sqrt{\frac{1}{4} \left(\frac{c_1 + c_2}{m_2} + \frac{c_1}{m_1} \right)^2 - \frac{c_1 c_2}{m_1 m_2}} \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (15)$$

Как видно из (15) частоты $\omega_{p1,2}$ – это собственные частоты консервативной КС с двумя степенями свободы [2, 3]. Заметим, что уравнение (13) с обоснованием его получения на основе определения амплитуд колебаний x_1 и x_2 приведено в работе [5].

Далее перейдем к рассмотрению диссипативной КС с двумя степенями свободы. В этом случае

$$x_1(j\omega) = \frac{[c_1 + c_2 - m_2 \omega^2 + j(b_1 + b_2)\omega]F(j\omega)}{(c_1 - m_1 \omega^2 + j b_1 \omega)[c_1 + c_2 - m_2 \omega^2 + j \omega (b_1 + b_2)] - (j b_1 \omega + c_1)^2}; \quad (16)$$

$$x_2(j\omega) = \frac{(j b_1 \omega + c_1)F(j\omega)}{(c_1 - m_1 \omega^2 + j b_1 \omega)[c_1 + c_2 - m_2 \omega^2 + j \omega (b_1 + b_2)] - (j b_1 \omega + c_1)^2}. \quad (17)$$

Как видно из (16) и (17), максимальные значения $x_1(j\omega)$ и $x_2(j\omega)$ будут при

$$(c_1 - m_1 \omega^2 + j b_1 \omega)[c_1 + c_2 - m_2 \omega^2 + j \omega (b_1 + b_2)] - (j b_1 \omega + c_1)^2 = 0. \quad (18)$$

Так как собственные (резонансные) частоты являются действительными, то при раскрытии скобок в (18) учтем только вещественную часть общего комплексного выражения. В этом случае имеем уравнения

$$\omega^4 - \left(\frac{c_1 + c_2}{m_2} + \frac{c_1}{m_1} - \frac{b_1 b_2}{m_1 m_2} \right) \omega^2 + \frac{c_1 c_2}{m_1 m_2} = 0, \quad (19)$$

$$\omega^2 (b_1 m_1 + b_1 m_2 + b_2 m_1) - b_2 c_1 - b_1 c_2 = 0. \quad (20)$$

Сравнивая первое уравнение (14) и (19), видим их подобие за исключением слагаемого $-\frac{b_1 b_2}{m_1 m_2}$, стоящего перед ω^2 . Это слагаемое и является влиянием диссипации на собственные частоты КС с двумя степенями свободы.

Резонансные частоты диссипативной КС с двумя степенями свободы с учетом (19) записываются выражениями

$$\omega_{p1,2} = \left[\frac{1}{2} \left(\frac{c_1 + c_2}{m_2} + \frac{c_1}{m_1} - \frac{b_1 b_2}{m_1 m_2} \right) \pm \sqrt{ \frac{1}{4} \left(\frac{c_1 + c_2}{m_2} + \frac{c_1}{m_1} - \frac{b_1 b_2}{m_1 m_2} \right)^2 - \frac{c_1 c_2}{m_1 m_2} } \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (21)$$

Из уравнения (20) резонансная частота

$$\omega_{p3} = \left[\frac{b_2 c_1 + b_1 c_2}{b_1 m_1 + b_1 m_2 + b_2 m_1} \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (22)$$

Как видно из (22) – это зависимость еще одной частоты ω_p от всех параметров диссипативной КС с двумя степенями свободы. Выражения (21), (22) – это результат аналитических решений. Эксперимент может подтвердить наличие этих частот.

Далее рассмотрим линейную диссипативную колебательную системы с n степенями свободы. Механическая схема ее изображена на рисунке 3, где $\overline{m_1, m_n}$ – массы; $\overline{c_1, c_n}$, $\overline{b_1, b_n}$ – коэффициенты жесткости и диссипации соответственно; $\overline{x_1, x_n}$ – перемещение; F – вынуждающая сила.

Дифференциальные уравнения такой КС имеют вид

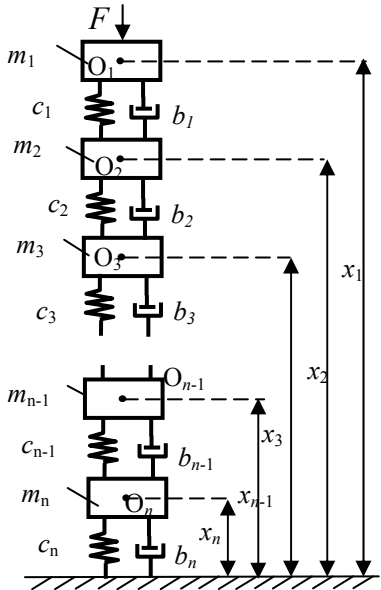


Рисунок 3

$$\left. \begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 + b_1 \dot{x}_1 + c_1 x_1 &= F + b_1 \dot{x}_2 + c_1 x_2; \\ m_2 \ddot{x}_2 + (b_1 + b_2) \dot{x}_2 + (c_1 + c_2) x_2 &= b_1 \dot{x}_1 + c_1 x_1 + b_2 \dot{x}_3 + c_2 x_3; \\ m_3 \ddot{x}_3 + (b_2 + b_3) \dot{x}_3 + (c_2 + c_3) x_3 &= b_2 \dot{x}_2 + c_2 x_2 + b_3 \dot{x}_4 + c_3 x_4; \\ &\vdots \\ m_{n-1} \ddot{x}_{n-1} + (b_{n-2} + b_{n-1}) \dot{x}_{n-1} + (c_{n-2} + c_{n-1}) x_{n-1} &= b_{n-2} \dot{x}_{n-2} + \\ &+ c_{n-2} x_{n-2} + b_{n-1} \dot{x}_n + c_{n-1} x_n; \\ m_n \ddot{x}_n + (b_{n-1} + b_n) \dot{x}_n + (c_{n-1} + c_n) x_n &= b_{n-1} \dot{x}_{n-1} + c_{n-1} x_{n-1} \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

На основании системы уравнений (23) представим структурную схему КС с n степенями свободы, изображенную на рисунке 4,

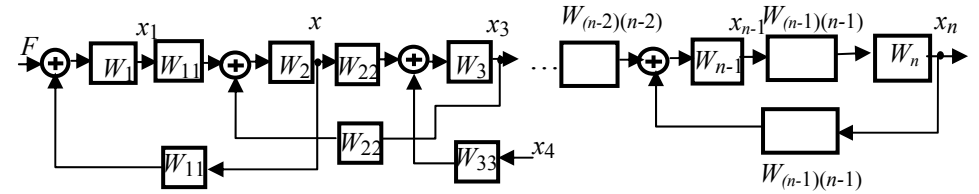


Рисунок 4

где F – внешнее воздействие; $\overline{x_1, x_n}$ – перемещение; \oplus – сумматоры; $(W_1, W_n), (\overline{W_{11}}, \overline{W_{(n-1)(n-1)}})$ – передаточные функции вида

$$W_1(j\omega) = \frac{1}{c_1 - m_1 \omega^2 + j\omega b_1}; W_k(j\omega) = \frac{1}{c_{k-1} + c_k - m_k \omega^2 + j\omega(b_{k-1} + b_k)}; \\ k = \overline{2, n}; w_{kk}(j\omega) = j\omega b_k + c_k; k = \overline{1, n-1}.$$

Как видно из рисунка 4, попарно перемещения x_k, x_{k+1} формируются общими передаточными функциями $W_{IIk}(j\omega), W_{II(k+1)}(j\omega)$ аналогичными выражениями (10). В нашем случае передаточные функции попарных КС с (x_k, x_{k+1}) имеют вид

$$W_{kn}(j\omega) = \frac{W_k(j\omega)}{1 - W_k(j\omega)W_{kk}^2(j\omega)W_{(k+1)}(j\omega)}, \\ W_{(k+1)n}(j\omega) = \frac{W_k(j\omega)W_{kk}(j\omega)W_{(k+1)}(j\omega)}{1 - W_k(j\omega)W_{kk}^2(j\omega)W_{(k+1)}(j\omega)}. \quad (24)$$

Пары перемещений x_k, x_{k+1} следующие: $(x_1, x_2), (x_2, x_3), (x_3, x_4), \dots, (x_{n-2}, x_{n-1}), (x_{n-1}, x_n)$. Поэтому передаточных функций (24) для каждого пе-

ремещения $\overline{x_2, x_{(n-1)}}$ будет две, а для x_1 – одна $W_1(j\omega) = \frac{W_1(j\omega)}{1 - W_1(j\omega)W_1^2(j\omega)W_2(j\omega)}$,

для x_n будет передаточная функция $W_{(n)n}(j\omega) = \frac{x_n(j\omega)}{x_{(n-1)}(j\omega)} = W_{(n-1)(n-1)}W_n$.

Сравнивая (10) и (24), видим, их общую математическую аналогию. А это означает, что КС с n степенями свободы образуется попарными КС с двумя степенями свободы. Это наглядно видно из рис. 4. Максимальные значения перемещений $x_k(j\omega), k = \overline{1, n}$ возникают при знаменателе в (24), равном нулю. Резонансные (собственные) частоты определяются из знаменателя в (24), приравненного к нулю. Здесь образуются уравнения

$$\omega^4 - \left[\frac{c_k + c_{(k+1)}}{m_{(k+1)}} + \frac{c_k}{m_k} - \frac{b_k b_{(k+1)}}{m_k m_{(k+1)}} \right] + \frac{c_k c_{(k+1)}}{m_k m_{(k+1)}} = 0, \quad k = \overline{1, n}, \quad (25)$$

$$\omega^2 [b_k m_k + b_k m_{(k+1)} + b_{(k+1)} m_k] - b_{(k+1)} c_k - b_k c_{(k+1)} = 0. \quad (26)$$

Из уравнения (25) определяются резонансные частоты каждой пары (x_k, x_{k+1}) , входящую в КС с двумя степенями свободы. Эти частоты записываются выражением

$$\omega_{pk(1,2)} = \left\langle \frac{1}{2} \left[\frac{c_k + c_{(k+1)}}{m_{(k+1)}} + \frac{c_k}{m_k} - \frac{b_k b_{(k+1)}}{m_k m_{(k+1)}} \right] \pm \left[\frac{1}{4} \left[\frac{c_k c_{(k+1)}}{m_k m_{(k+1)}} + \frac{c_k}{m_k} - \frac{b_k b_{(k+1)}}{m_k m_{(k+1)}} \right]^2 - \frac{c_k c_{(k+1)}}{m_k m_{(k+1)}} \right]^{\frac{1}{2}} \right\rangle^{\frac{1}{2}}. \quad (27)$$

Заметим, что выражение (24) и (20) математически аналогичны. Для перемещения x_n , кроме (27) имеются еще резонансные частоты, вид которых был определен для диссипативной КС с одной степенью свободы выражением (27). В нашем случае

$$\omega_{pn(1,2)} = \left(\frac{c_n}{m_n} \pm \frac{b_n}{2m_n^2} \sqrt{b_n^2 - 4m_n c_n} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (28)$$

Особенности анализа (28) приведены при анализе (7). Из уравнения (26) имеем еще одну резонансную частоту

$$\omega_{pk(3)} = \left[\frac{b_{(k+1)} c_k + b_k c_{(k+1)}}{b_k m_k + b_k m_{(k+1)} + b_{(k+1)} m_k} \right]^{\frac{1}{2}},$$

которая является функцией от параметров $b_k, b_{(k+1)}, c_k, c_{(k+1)}, m_k, m_{(k+1)}$.

Таким образом, располагая параметрами КС или задаваясь ими и предусматривая связь в виде, изображенной на рисунке 3 строится структурная КС с n степенями свободы, а затем в соответствии с предложенным методом расчетным путем в замкнутой форме определяются все собственные (резонансные) частоты данной КС.

Список литературы: 1. Андре Анго. Математика для электро- и радиотехников. М.: Наука, 1965. – 780с. 2. Бабаков И.М. Теория колебаний. – М.: Наука, 1965. – 560с. 3. Божко А.Е., Голуб Н.М. Динамико-энергетические связи колебательных систем. Киев: Наук. думка, 1980. – 188с. 4. Вибрации в технике. В 6-ти т. Колебания линейных систем / Под ред. В.В. Болотина. – М.: Машиностроение, 1978. – Т. 1. – 352с. 5. Пановко Я.Г., Губанова И.И. Устойчивость и колебания упругих систем. М.: Наука, 1979. – 384с.

Поступила в редколлегию 25.04.09

УДК 620.169.2.

Н.Н. ИШИН, канд. техн. наук, доцент, начальник отдела ОИМ НАН Беларуси
А.М. ГОМАН, канд. техн. наук, доцент, вед. научный сотрудник ОИМ НАН Беларуси

УСКОРЕННЫЕ ИСПЫТАНИЯ ЗУБЧАТЫХ КОЛЕС НА КОНТАКТНУЮ ВЫНОСЛИВОСТЬ

Предложен метод, позволяющий уменьшить более чем на порядок длительность трудоемких и дорогостоящих ресурсных испытаний зубчатых колес за счет сокращения числа испытываемых образцов, ускорить внедрение новых перспективных материалов и технологий упрочнения, улучшающих эксплуатационные свойства зубчатых передач приводных механизмов.

The method allowing to reduce more than 10 times duration of labour-consuming and expensive resource tests of cogwheels due to reduction of number of tested samples, to accelerate introduction of new perspective materials and the technologies of hardening improving operational properties of the driven mechanisms tooth gears is offered.

Актуальность задачи. Ресурсные испытания приводных механизмов на основе зубчатых передач в значительной степени определяют сроки освоения серийного производства, а также себестоимость новой техники. Традиционные способы и методы испытаний (стендовые и полигонные) новых конструкций зубчатых передач требуют значительного времени, трудовых и энергетических затрат, поскольку, к примеру, для получения одной точки на кривой контактной выносливости зубьев требуется, как минимум, провести испытание одной зубчатой пары (шестерня-колесо), а лучше 3-4-х, для повышения достоверности определения ее положения. В то же время испытания одной зубчатой пары могут длиться от 100 до 1000 и более часов.